www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail

CONCOURS 1990

ÉPREUVE DE MATHÉMATIQUES II

Option M

DURÉE : 4 heures

On rappelle au candidat qu'il sera tenu le plus grand compte de la clarté des raisonnements ainsi que de la présentation.

Rappels et notations

Dans tout le problème, E désigne un espace vectoriel de dimension n ($n \geqslant 2$) sur $\mathbb{K}$, où $\mathbb{K}$ désigne $\mathbb{R}$ ou $\mathbb{C}$.

On note $\mathscr{L}(E)$ l'ensemble des endomorphismes de E, et $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ l'ensemble des matrices carrées d'ordre n à coefficients dans $\mathbb{K}$.

Si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, la transposée de A sera notée ${}^tA$ et sa trace Tr(A).

Si f est élément de $\mathscr{L}(E)$, de matrice A dans une base $\mathscr{B}$ de E, et P le polynôme caractéristique de f, $P(x) = \det(x I_n - A)$, et on admettra que $P(f) = 0$, ainsi que $P(A) = 0$.

On rappelle que si $A \in \mathscr{M}_n(\mathbb{K})$ et si on note com (A) sa comatrice, alors :

(1) $$ {}^t\mathrm{com}(A) \cdot A = A \cdot {}^t\mathrm{com}(A) = \det(A)\, I_n. $$

Une matrice A est dite nilpotente s'il existe un entier p tel que $A^p = 0$.

Si f est une application d'un ensemble dans lui-même, on note :

$$ f^0 = \mathrm{Id} \qquad \text{et} \qquad f^p = f^{p-1} \circ f \qquad \text{pour } p \in \mathbb{N}^*. $$

Si F est une partie de E, on note Vect (F) le sous-espace engendré par F.

On note $Re(\alpha)$ la partie réelle du nombre complexe α.

I. TRACE ET MATRICES NILPOTENTES

1. Soient A et B deux éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   a. Établir que Tr (AB) = Tr (BA).

   b. En déduire que deux matrices semblables ont même trace et utiliser ce résultat pour définir la trace d'un endomorphisme de E.

2. On considère, pour $i \in \{1, \ldots, n\}$, n applications V_i dérivables sur un intervalle I de $\mathbb{R}$ à valeurs dans $\mathbb{K}^n$, et B la base canonique de $\mathbb{K}^n$

   Soit Δ : $$ \begin{aligned} I &\longrightarrow \mathbb{K} \\ x &\longmapsto \det_B(V_1(x), V_2(x), \ldots, V_n(x)). \end{aligned} $$

   Montrer que Δ est dérivable sur I et que : $$ \forall x \in I,\ \Delta'(x) = \sum_{j=1}^{n} \det_B(V_1(x), \ldots, V_j'(x), \ldots, V_n(x)). $$

3. Pour A de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$, soit $P(X) = X^n + a_1 X^{n-1} + \ldots + a_{n-1} X + a_n$ le polynôme caractéristique de A. Pour x, élément de $\mathbb{K}$, on considère $C(x) = {}^t\mathrm{com}(x I_n - A)$.

   a. Prouver que l'on peut écrire : $$ C(x) = \sum_{j=0}^{n-1} x^j C_j $$

   où les C_j sont des éléments de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

   Déterminer les C_j en utilisant la relation (1) du paragraphe « Rappels et notations ».

   b. Déduire du 2, et du 3.*a.* que : $$ \forall j \leqslant n-2 \qquad \mathrm{Tr}(C_j) = (j+1)\, a_{n-j-1} $$ $$ \mathrm{Tr}(C_{n-1}) = n. $$

4. On suppose que $\forall k,\ 1 \leqslant k \leqslant n$, $\mathrm{Tr}(A^k) = 0$. Déterminer le polynôme caractéristique de A et en déduire que A est nilpotente.

Tournez la page S.V.P.

5. Dans la suite du problème, on considère g de $\mathscr{L}(E)$ et φ l'application associée à g définie par :

$$\varphi : \mathscr{L}(E) \longrightarrow \mathscr{L}(E)$$
$$f \longmapsto \varphi(f) = f \circ g - g \circ f.$$

$\mathscr{B} = (e_1, e_2, ..., e_n)$ étant une base de E, on note $u_{i,j}$ l'élément de $\mathscr{L}(E)$ défini par :

$$\forall\, k,\ u_{i,j}(e_k) = \delta_{k,j} e_i \quad (\delta_{k,j} = 1 \text{ si } k = j, \quad 0 \text{ sinon}).$$

a. Montrer que $\varphi \in \mathscr{L}(\mathscr{L}(E))$.

b. Calculer $\varphi(u_{i,j})$. En déduire la valeur de Tr (φ).

II. ÉTUDE DU NOYAU ET DE L'IMAGE DE φ

1. Montrer que Vect $(\mathrm{Id}, g, ..., g^{n-1}) \subset$ Ker φ et que dim ker $\varphi \geqslant 2$.

2. Prouver que si $f \in$ Ker φ, alors tout sous-espace propre de g est stable par f.

3. On suppose que g est diagonalisable.

a. Montrer que Ker φ est constitué de tous les endomorphismes de E laissant stables les sous-espaces vectoriels propres de g.

b. Soient $\lambda_1, ..., \lambda_p$ les valeurs propres de g et $n_1, ..., n_p$ les dimensions des sous-espaces propres associés $E_{\lambda_1}, ..., E_{\lambda_p}$.
Prouver que Ker φ est isomorphe à $\prod_{i=1}^{p} \mathscr{L}(E_{\lambda_i})$. En déduire la dimension de Ker φ.

4. On suppose que le polynôme caractéristique de g n'a que des racines simples. En utilisant une base dans laquelle la matrice de g est diagonale, montrer que Ker φ = Vect $(\mathrm{Id}, g, ..., g^{n-1})$, et donner la dimension de Vect $(\mathrm{Id}, g, ..., g^{n-1})$.

5. On suppose que g est diagonalisable et que dim ker $\varphi = n$. Prouver que, pour tout i, $n_i = 1$ (avec les notations du II. 3.).

6. Soit $\mathscr{T}$ l'ensemble des matrices de trace nulle.

a. Prouver que $\mathscr{T}$ est un hyperplan de $\mathscr{M}_n(\mathbb{K})$.

b. Montrer que Im $\varphi \subset \mathscr{T}$. A-t-on l'égalité ?

III. VALEURS PROPRES DE φ

A

1. Pour $p \in \mathbb{N}^*$ et f de $\mathscr{L}(E)$, calculer $\varphi^p(f)$.

2. En déduire que si g est nilpotent, φ l'est aussi.

Tournez la page S.V.P.

B

1. Soit α valeur propre non nulle de φ, et f vecteur propre associé.

   a. Prouver que $\forall \mu \in \mathbb{K}$, $\quad f \circ (g + \mu \mathcal{H}d) = (g + (\mu + \alpha)\mathcal{H}d) \circ f$, et en déduire que $\det f = 0$.

   b. Pour $p \in \mathbb{N}^*$, calculer $\varphi(f^p)$. En déduire que f est nilpotente.

2. Soit λ valeur propre de g et x un vecteur propre associé. Montrer alors que l'une au moins des deux propriétés suivantes est vérifiée :

   a. $x \in \operatorname{Ker} f$;

   b. $\lambda - \alpha$ est une valeur propre de g.

3. On suppose que $\dim \ker f = 1$ et $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

   a. Montrer que : $\quad \forall p < n,\ \operatorname{Ker} f \subset \operatorname{Im} f^p$

   puis que : $\quad \forall p < n,\ \dim \operatorname{Im} f^{p+1} + 1 = \dim \operatorname{Im} f^p$.

   En déduire $\dim \operatorname{Ker} f^p$ pour $p \leqslant n$.

   b. On suppose de plus que $\alpha \in \mathbb{R}_+^*$ et que g est diagonalisable de valeurs propres $\lambda_1, \ldots, \lambda_p$ telles que :

   $$\operatorname{Re}(\lambda_1) \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_2) \leqslant \ldots \leqslant \operatorname{Re}(\lambda_p).$$

   Établir que $\forall k \leqslant p$, $\operatorname{Ker}(g - \lambda_k \mathcal{H}d) \subset \operatorname{Ker} f^k$, puis que :

   $$\forall k \leqslant p,\ \operatorname{Ker} f^k = E_{\lambda_1} \oplus \ldots \oplus E_{\lambda_k}.$$

   Que peut-on en déduire pour les valeurs propres de g ?

   c. Faire un raisonnement analogue avec $\alpha = \rho e^{i\theta}$, $\rho > 0$. On pourra écrire $\lambda_j = \mu_j e^{i\theta}$, où $\mu_j \in \mathbb{C}$.

C

1. On suppose g diagonalisable.

   a. Soit $\alpha \in \mathbb{K}^*$ tel que λ et $\lambda - \alpha$ soient des valeurs propres de g. Montrer que α est valeur propre de φ.

   b. Prouver que si $\text{Spectre}(g) = \{\lambda_i ; 1 \leqslant i \leqslant p\}$ alors $\text{Spectre}(\varphi) = \{\lambda_i - \lambda_j ; 1 \leqslant i \leqslant p, 1 \leqslant j \leqslant p\}$, et que φ est diagonalisable.

2. On suppose que $\dim E = 2$, que g n'est pas une homothétie et que φ est diagonalisable.

   a. Montrer que $\operatorname{Ker} \varphi$ est de dimension 2. Que vaut alors $\operatorname{Ker} \varphi$?

   b. Montrer que le spectre de φ est de la forme $\{0, \alpha, -\alpha\}$ où $\alpha \in \mathbb{K}$, $\alpha \neq 0$. Soit f_α (resp $f_{-\alpha}$) un vecteur propre associé à α (resp $-\alpha$). Montrer que $f_\alpha^2 = f_{-\alpha}^2 = 0$.

   c. Prouver que $E = \operatorname{Ker} f_\alpha \oplus \operatorname{Ker} f_{-\alpha}$.

   En déduire que g est diagonalisable.

www.tunisie-etudes.info

Ce document a été téléchargé depuis
www.tunisie-etudes.info

Des documents gratuits, devoirs, examens, cours, exercices, corrigés... Ainsi que toute une rubrique pour vous aider à trouver un emploi sans oublier les avis de concours en direct

Notre page Twitter :
http://www.twitter.com/TunisieEtudes
Notre page FaceBook :
http://www.facebook.com/TunisieEtudes



Merci d'avoir choisi www.tunisie-etudes.info
Bonne lecture et bon travail